Ciencia e Ingeniería
Revista Interdisciplinar de Estudios en Ciencias Básicas e Ingenierías.
Año 2014, Enero-Junio, Vol. (1) N° (1) ISSN 2389-9484.
Universidad de La Guajira, Facultades de Ciencias Básicas y Aplicadas e Ingeniería.
La Guajira-Colombia.
Revista en Línea http://revistas.uniguajira.edu.co/index.php/cei



SIMULACIÓN BIDIMENSIONAL DE LA ECUACIÓN DE CALOR

BIDIMENSIONAL SIMULATION OF THE HEAT EQUATION

Charlo González Tibisay Ocando, Mabel Pardo y Rafael Surga

Departamento de Ingeniería Eletrónica
UNEXPO-Vicerrectorado de Puerto Ordaz
cegonzalez@unexpo.edu.ve

Recibido: Febrero 6 de 2014 Aceptado: Julio 8 de 2014

RESUMEN

La conducción de calor en superficies en estado transitorio, es uno de los problemas de análisis más común en el estudio de los diversos fenómenos físicos asociados a transferencia de calor en procesos industriales, tales como los presentes en la industria química, metalúrgica, etc. Es de aquí que surge la necesidad de desarrollar un simulador o herramienta computacional que sea capaz de mostrar este proceso, bajo diversas condiciones, para su respectivo análisis en estado transitorio y aplicación en superficies de distintos materiales. Para el desarrollo del simulador implementado en Matlab, se consideraron las ecuaciones diferenciales hiperbólicas de segundo orden, la cual rige el comportamiento de la transferencia de calor en la superficie bidimensional y se utilizó el método por diferencias finitas de segundo orden con formulación explicita para la obtención de la solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales. El resultado obtenido permite visualizar a través de una interfaz gráfica la conducción de calor en una superficie en dos dimensiones, utilizando diferentes tipos de materiales, con distintas dimensiones y bajo diferentes condiciones térmicas iníciales. Como conclusión se logró desarrollar un programa que permite analizar la conducción de calor en superficies bidimensionales, basándose en criterios que garantizan la estabilidad y la confiabilidad en la simulación

Palabras Clave: Simulador, Transferencia de Calor, Diferencias finitas, Matlab.

ABSTRACT

The heat conduction in surfaces in transient state, is one of the problems of analysis commonest in the study of the diverse associated physical phenomena to heat transference in industrial processes, such as the presents in the chemical, metallurgical industry, etc. It is that's why arises the necessity to develop to a simulator or computacional tool that is able to show this process, under diverse conditions, for its respective analysis in transient state and application in surfaces of different materials. For the development of the simulator implemented in Matlab, the equations were considered hyperbolic differentials of second order, which governs the behavior of the heat transference in the bidimensional surface and the method by finite differences of second order with formulation was used specifies for the obtaining of the solution of the derived equation differential in partial. The obtained result allows to visualize through a graphical interface the heat conduction in a surface in two dimensions, being used different types from materials, with different dimensions and under different thermal conditions it initiates to them. As conclusion were managed to develop a program that allows to analyze the heat conduction in bidimensional surfaces, being based on criteria that guarantee the stability and the trustworthiness in the simulation.

Keywords: Simulator, heat transference, finite differences, Matlab.

1. INTRODUCCIÓN

Los fenómenos de transferencia de calor tienen un papel importante en muchos problemas industriales y ambientales (Incropera,1999). Por ejemplo, consideremos el área vital de la producción y conversión de energía, así como en la industria química, metalúrgica, entre otras. Estos problemas incluyen procesos de conducción, convección y radiación que se relacionan con el diseño de sistemas.

Este tipo de problemas exigen un análisis permanente de los fenómenos que ocurren, los cuales normalmente requieren tomar en consideración múltiples variables o parámetros según la situación. En muchas ocasiones, el análisis está sujeto a la experiencia del personal y requiere del mismo el manejo eficiente de la información, tal que permita hacer los ajustes correspondientes a las variables del sistema con la pericia adecuada con fines de lograr su máxima efectividad. Sin embargo, pueden surgir errores en las estimaciones lo cual conlleva a posibles errores que afecten los resultados esperados, que si corresponden a procesos productivos, pueden llevar a pérdidas de recursos y tiempo.

Este proceso probablemente empírico, pierde vigencia cuando se requiere un proceso analítico y sistemático fundamentado en la rigurosidad científica. El empleo de una herramienta computacional como un simulador, permitiría que la solución que se le dé al problema esté más ajustada a las necesidades, facilitando que tanto el control del proceso como la toma de decisiones sean llevadas a cabo por métodos comprobables y repetitivos.

El objetivo del trabajo, es desarrollar una herramienta informática que permita obtener la solución de las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales de segundo orden de tipo hiperbólico, que rigen el comportamiento de la transferencia de calor en superficies bidimensionales, estrategia para el análisis de la superficie, el diagrama de flujo y seguidamente se muestran los resultados y discusión de la simulación por el método de diferencias finitas, usando las herramientas que nos ofrece el software MATLAB. Finalmente, se expresan las conclusiones del estudio.

I. DESARROLLO

1 Modelo Matemático.

Para efectos del modelado matemático, se harán las siguientes consideraciones:

- El problema se abordará solamente desde el punto de vista térmico.
- Se desprecia la transferencia de calor por radiación.
- Solo se tomará en cuenta la transferencia de calor por conducción.
- La sección de la superficie a estudiar se considera simétrica longitudinal y transversalmente, haciendo el estudio en dos dimensiones.

La ecuación diferencial que rige la transferencia de calor por conducción en materiales isotrópicos en dos dimensiones, es:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)= C_p\rho\,\frac{\partial T}{\partial t} \quad en \quad \Omega_T \tag{1}$$

donde:

Ω_T es el dominio bajo estudio.

$k = k(x,z,T)$ Conductividad Térmica

$C_p = C_p(x,z,T)$ Calor específico

$\rho = \rho(x,z,T)$ Densidad del material

$T = T(x,z,t)$ Temperatura.

t = tiempo

$\dot{q} = \dot{q}(V) = 0$ Generación de calor

Las condiciones de borde térmica (C.B.T) son:

Simetría en x = 0

$$k(x,z,T)\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \qquad en \qquad x = 0$$

Simetría en y = 0

$$k(x,z,T)\frac{\partial T}{\partial y} = 0 \qquad en \qquad y = 0 \qquad (2)$$

2 Aplicación del método de las diferencias finitas.

A partir de la ecuación (1) considerando que $\dot{q} = 0$ y k=constante y empleando aproximación por diferencias *central* para el término espacial y *hacia adelante* para el término temporal, se reemplazan la derivada parcial de segundo orden y simple, obteniéndose (Zozaya, 2004):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{c_p \rho}{k}\frac{\partial T}{\partial t} \qquad en \quad \Omega_T \quad (3)$$

Considerando que la función *u(x,t)=T(i,j)*, el desplazamiento h = Δx para el caso espacial y h = Δt para el caso temporal, reemplazando las expresiones para las derivadas dobles y simples se tiene:

$$T^{n+1}{}_{(i,j)} = \left(T^n{}_{(i+1,j)} + T^n{}_{(i-1,j)} + T^n{}_{(i,j+1)} + T^n{}_{(i,j-1)} + (\delta - 4).T^n{}_{(i,j)}\right)/\delta \qquad (4)$$

La ecuación (4) es la discretización de la ecuación (3). Para más detalle sobre la deducción matemática de las ecuaciones discretizadas (Gonzalez *et al*, 2013)

Haciendo que $\frac{1}{\delta} = F_o$; queda:

$$T^{n+1}{}_{(i,j)} = F_o\left(T^n{}_{(i+1,j)} + T^n{}_{(i-1,j)} + T^n{}_{(i,j+1)} + T^n{}_{(i,j-1)}\right) + (1 - 4.F_o)T^n{}_{(i,j)}$$

(5)

La ecuación (5) corresponde a la ecuación en diferencias finitas para nodos interiores de la superficie del material.

En la ecuación (5) F_o, es el número de Fourier, dado por:

$$F_o = \frac{\alpha.\Delta t}{(\Delta X)^2} \qquad (6)$$

y α, es la difusividad térmica del material, dado por:

$$\alpha = \frac{k}{\rho.C_p} \qquad (7)$$

Por analogía puede obtenerse la ecuación para los nodos frontera en superficie plana con convección (incropera,1999):

$$T^{n+1}{}_{(i,j)} = F_o\left(2T^n{}_{(i-1,j)} + T^n{}_{(i,j+1)} + T^n{}_{(i,j-1)} + 2B_iT_\infty\right) + (1 - 4F_o - 2B_iF_o)T^n{}_{(i,j)}$$

(8)

donde B_i, es el número de Biot, y h es el coeficiente de transferencia de calor por convección, dado por:

$$B_i = \frac{h.\Delta X}{k} \qquad (9)$$

Para el caso de nodos en esquina exterior con convección, se tiene:

$$T^{n+1}{}_{(i,j)} = 2F_o\left(T^n{}_{(i-1,j)} + T^n{}_{(i,j-1)} + 2B_iT_\infty\right) + (1 - 4F_o - 4B_iF_o)T^n{}_{(i,j)} \qquad (10)$$

3 Criterios de Estabilidad

Matemáticamente, se consideraron los criterios de estabilidad que rigen la solución de las ecuaciones en diferencias finitas previamente establecidas (González *et al*, 2013).
Para la estabilidad se requiere que el coeficiente para $T^n{}_{(i,j)}$ sea mayor que o igual a cero, aplicando este criterio a las ecuaciones 5, 8 y 10 se obtienen los valores de F_o como sigue:

a) Para nodos interiores:

$$1 - 4F_o \geq 0 \rightarrow F_o \leq \frac{1}{4} \qquad (11)$$

b) Para nodos exteriores:

$$1 - 4F_o - 2B_iF_o \geq 0 \rightarrow F_o(2 + B_i) \leq \frac{1}{2} \qquad (12)$$

c) Para nodos en esquinas exteriores:

$$1 - 4F_o - 4B_iF_o \geq 0 \rightarrow F_o(1 + B_i) \leq \frac{1}{4} \qquad (13)$$

Considerando las ecuaciones 11, 12 y 13 la respuesta obtenida tendrá la estabilidad que permita la repetitividad de los resultados para idénticos valores de simulación.

4 Estrategia de análisis de la superficie bidimensional.

Para el análisis del problema se puede considerar una superficie con dimensiones ***x*** y ***z***.Expresadas como:

$$P = \begin{cases} 0 \le x \le x_0 \\ 0 \le z \le z_0 \end{cases} \quad Dimensión = x_0 * z_0 \quad (14)$$

Considerando la superficie, se obtiene la malla de la figura 1, en la cual n_x representa el número de líneas verticales que subdividen la dimensión del eje x y n_z el número de líneas verticales que subdividen el eje z.

Los valores de n y m se pueden determinar por:

$$n_x = \frac{x_0}{\Delta x} \quad y \quad n_z = \frac{z_0}{\Delta z} \qquad (15)$$

Considerando Δx y Δz iguales ($\Delta x = \Delta z$), se tiene:

$$n_x = \frac{x_0}{\Delta x} \quad y \quad n_z = \frac{z_0}{\Delta z} = \frac{z_0}{x_0 / n_x} = \frac{n_x z_0}{x_0} \qquad (16)$$

A partir de la figura 1 se obtiene el análisis de nodos. El número de nodos por fila y columna se determina por:

$$Nodos_{fila} = n_x - 2 \quad \text{y} \; Nodos_{columna} = n_z - 2 \quad (17)$$

Donde se ha eliminado el nodo inicial y el final porque forman parte de las fronteras.
El total de nodos en la malla es:

$$Total\ Nodos = (n_x - 2) * (n_z - 2) \qquad (18)$$

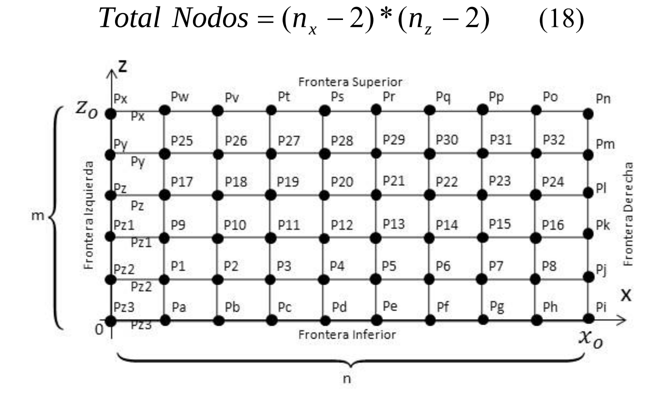


Figura 1. Estructura y distribución de nodos en la malla de la superficie.

En la malla se tienen nodos en la frontera, nodos internos de la malla, y nodos en esquina exteriores. Si el análisis se realiza a partir de la fila 2 (para i=2) y la columna 2 (j=2), la expresión para el término general *u(i,j)*, sería:

$$u(i,j) = u(i+1, j+1) \quad \begin{cases} 1 \le i < n, & i \; entero \\ 1 \le j < m, & j \; entero \end{cases} \quad (19)$$

El estudio realizado sobre la difusión de calor en la lámina, consideró tres tipos de análisis: análisis de nodos de las fronteras, análisis de nodos de las esquinas y análisis de nodos internos. Para cada caso se obtuvieron las ecuaciones correspondientes que están representadas por las ecuaciones 5, 8 y 10.

II. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

A continuación, se detalla en primer lugar el diagrama de flujo general del programa desarrollado en Matlab, se explica la interfaz y los resultados obtenidos bajo diversas condiciones de simulación.

1 Diagrama de Flujo

El algoritmo empleado para abordar el desarrollo del simulador puede ser representado en forma general por el diagrama de flujo de la figura 2.



Figura 2. Diagrama de flujo del programa desarrollado

El análisis del mismo es el siguiente: se ingresan los parámetros de simulación como la dimensión de la lámina, el número de iteraciones, luego se ingresan los datos de temperaturas laterales, interna y externa respectivamente, también el Coeficiente de Transferencia de Calor por Convección, y finalmente, los datos inherentes al tipo de material, pudiéndose escoger entre cuatro opciones predefinidas o si se trata de un material no listado, ingresar los parámetros en las celdas correspondientes. Se realizan los cálculos aplicando las ecuaciones 5, 8 y 10 y considerando además, los criterios de estabilidad ya descritos, cuyos cálculos se realizan para el número de iteraciones que se ingresaron y que permiten estudiar el proceso evolutivo de transferencia de calor. Los resultados se mostrarán por pantalla en el lateral izquierdo de la interfaz.

2 Interfaz para ingreso de datos y mostrar resultados en pantalla.

Los datos al simulador se ingresan haciendo uso de una interfaz desarrollada en GUIDE de Matlab. Se ingresan por esta vía todos los datos de temperatura ya descritos. De igual manera se ingresa la dimensión de la superficie, la cual se asume por facilidad de graficación como cuadrada, el coeficiente de transferencia de calor por convección y el número de iteraciones.

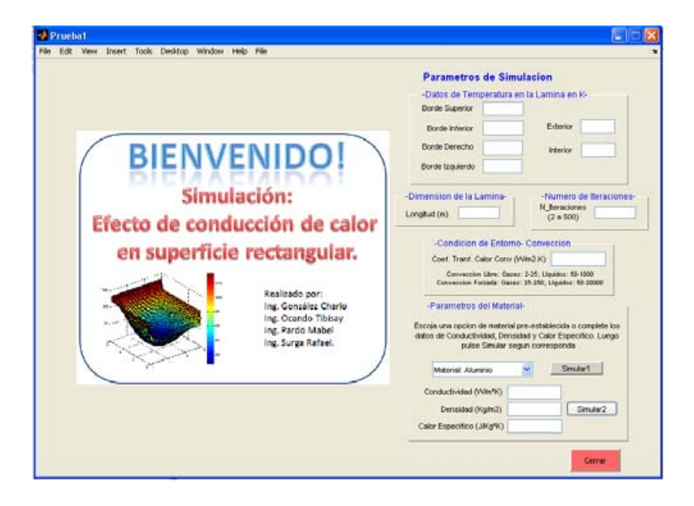


Figura 3. Interfaz del simulador desarrollado

Finalmente, se ingresan los parámetros asociados al tipo de material, proceso que puede hacerse por dos vías. Una con materiales predefinidos: aluminio, hierro, acero y carbón. Si el material bajo análisis corresponde a uno de estos cuatro, luego de seleccionar la opción adecuada se pulsa “Simular 1” para obtener los resultados. La otra vía, si se trata de otro tipo de material no listado, se ingresan sus parámetros en las opciones “Conductividad”, “Densidad” y “Calor Específico” y luego se pulsa “Simular 2”. Los resultados se desplegarán en el área ubicada en el lateral izquierdo, según se muestra en la figura 3.

3 RESULTADOS DE LA SIMULACIÓN EN MATLAB.

Con el objetivo de resolver la ecuación diferencial que modela la conducción de calor a través de superficies bidimensionales, se desarrolló un programa en el software Matlab 2011, con interfaz gráfica en GUIDE. A continuación, se muestran algunos de los resultados obtenidos variando las condiciones de la simulación.

3.1 Simulación 1. Se realiza una primera simulación con las siguientes condiciones, las cuales se ingresan al simulador:

Dimensiones: 2m x 2m

Iteraciones: 150 y 500

Coef. Tranf. Calor Conv.: 25

Tipo de material: Aluminio

Densidad: 2702 Kg/m^3

Calor específico: 903 J/Kg.K

Conductividad térmica: 237 W/m.K

T inicial = 330 K

T ext= 300 K

Condiciones de Borde:

Temperatura en Borde superior:860 K

Temperatura en Borde inferior:420 K

Temperatura en Lateral derecho: 480 K

Temperatura en Lateral Izquierdo: 560 K

Como resultado de la simulación para 150 iteraciones, se ha obtenido como respuesta la figura 4, la cual muestra la función temperatura a lo largo de la lámina durante los ciclos de simulación. Se puede observar en la misma que la temperatura desciende desde los bordes hacia el centro de la lámina la cual se encuentra inicialmente a 330K. El borde de mayor temperatura es el superior. Una imagen en dos dimensiones permite observar este proceso de propagación de temperatura desde los bordes hacia el centro de la lámina, como se muestra en la figura 5.

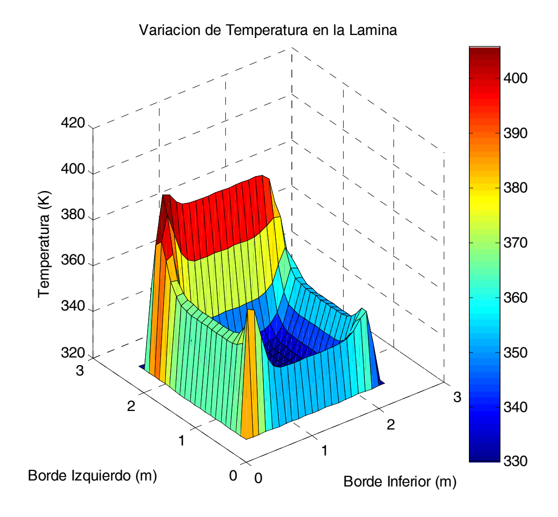


Figura 4. Resultado de la simulación para aluminio con 150 iteraciones con imagen en 3D.

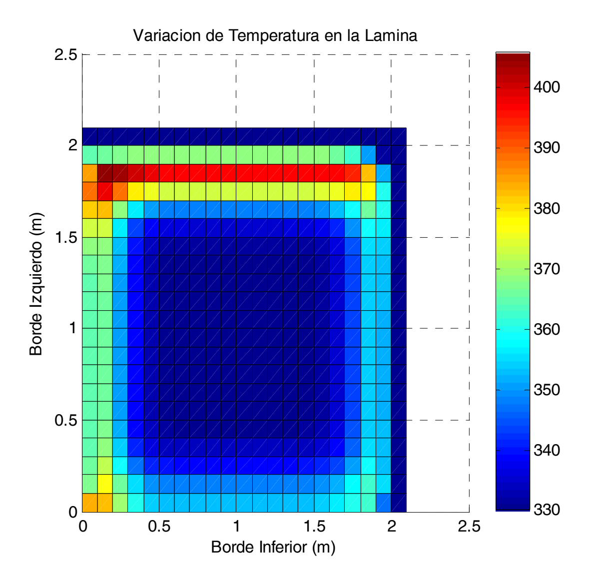


Figura 5. Resultado de la simulación para aluminio con 150 iteraciones con imagen en 2D.

Este proceso de propagación de temperatura hacia el centro de la lámina se puede analizar mejor incrementando el número de iteraciones, lo cual es equivalente a incrementar el tiempo de estudio para ver como la temperatura del centro de la lámina se va incrementando progresivamente. Este análisis se muestra en la figura 6, la cual es el resultado de la simulación para un número de iteraciones igual a 500. En la figura 7 se muestra la imagen en dos dimensiones para facilitar su análisis.

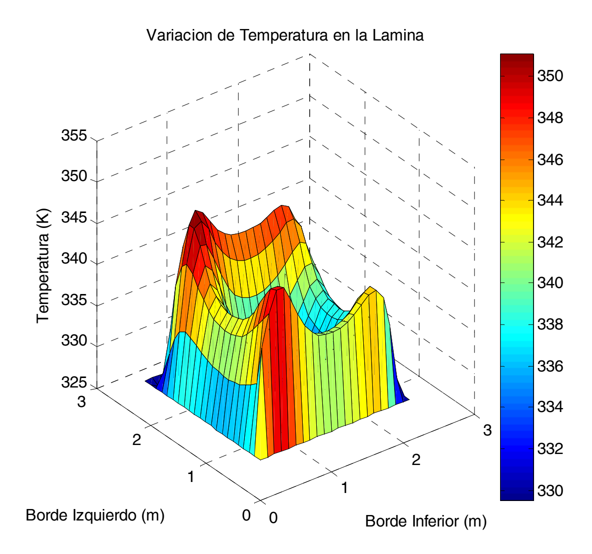


Figura 6. Resultado de la simulación para aluminio con 500 iteraciones con imagen en 3D.

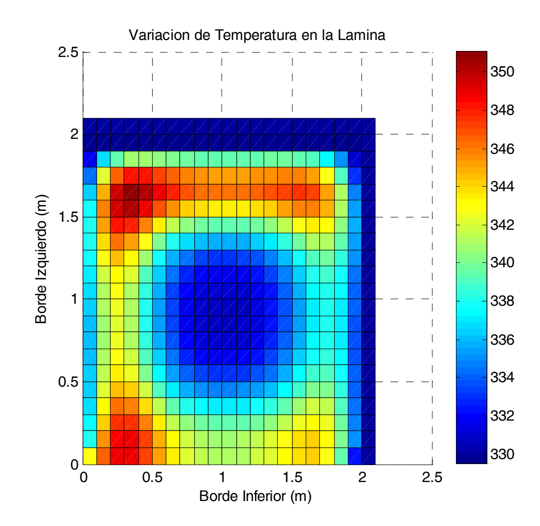


Figura 7. Resultado de la simulación para aluminio con 500 iteraciones con imagen en 2D.

Del análisis de las figuras 6 y 7 se desprende que al transcurrir el tiempo (mayor número de iteraciones), el calor se propaga hacia toda la superficie dela lámina, tendiendo a incrementar la temperatura inicial de la lámina de 300K a 330K aproximadamente. Incrementando aún más el número de iteraciones hasta 1500, el proceso es mucho más evidente como se puede observar en la figura 8, en la cual la temperatura del centro de la lámina se ha elevado hasta valores próximos a los 335 K. El calor conforme se ha ido propagando hacia el centro de la lámina ha ido transfiriendo energía, ocasionando que los valores de temperatura próximos al centro de la lámina no sean tan elevados, de allí que la diferencia de valores de temperatura sea de solo 9 K en la lámina. figura 8.

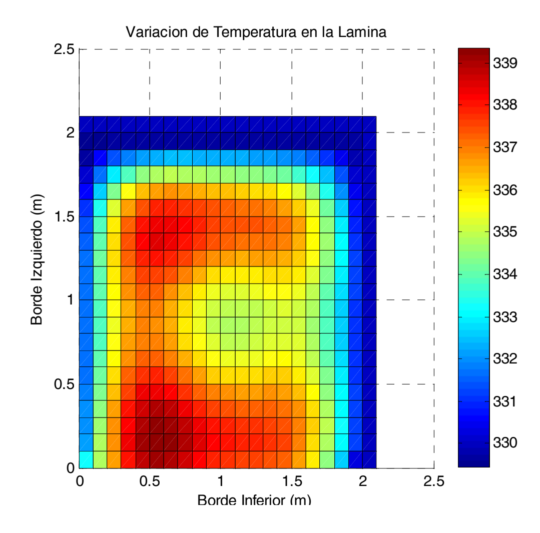


Figura 8. Imagen 2D que resulta de la simulación para aluminio con 1500 iteraciones.

3.2 Simulación 2. Para esta simulación solo se cambió el tipo de material por acero, manteniéndose todas las otras condiciones de la simulación anterior.
Condiciones nuevas:

Tipo de material: Acero

Densidad: 7870 Kg/m^3

Calor específico: 447 J/Kg.K

Conductividad térmica: 80.2 W/m.K

Como resultado de la simulación para el acero, se obtienen las imágenes de la figuras 9 y 10 para 150 y 500 iteraciones respectivamente. De su análisis se desprende un comportamiento similar a los casos ya estudiados para el aluminio y su variación en el número de iteraciones. A mayor número de iteraciones, la tendencia es que el calor se propague hacia el centro de la lámina elevando su temperatura en las áreas próximas a él. Parte del calor se transfiere, ocasionando que la temperatura se eleve muy poco en la lámina. Para este caso la diferencia de temperatura es de 300K para 150 iteraciones y 100K para 500 iteraciones, a diferencia del aluminio el cual presenta una diferencia de temperatura de 70K y 20K para 150 y 500 iteraciones respectivamente.

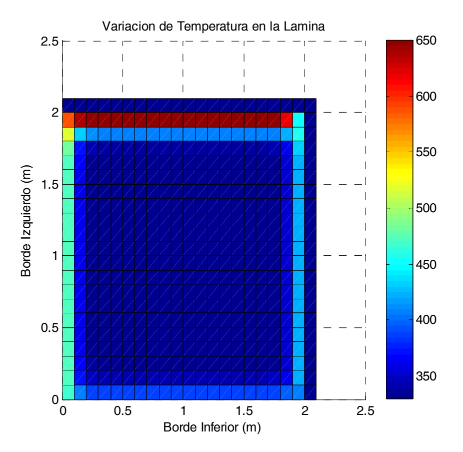


Figura 9. Imagen 2D mostrando el resultado de la simulación para acero con 150 iteraciones.

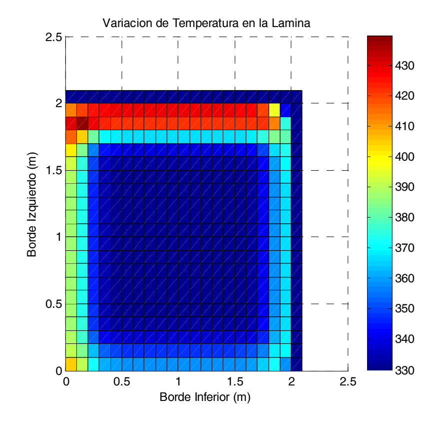


Figura 10. Imagen 2D mostrando el resultado de la simulación para acero con 500 iteraciones.

4. DISCUSIÓN.

Se puede observar en la figura 5 que la temperatura en el centro de la lámina se mantiene en valores bajos para tiempos cortos (bajo número de iteraciones), mientras que al incrementarse las iteraciones, la temperatura del centro de la lámina tiende a elevarse, según se observa en las figuras 5 y 7. Es previsible que para tiempos mayores, el centro de la lámina adquiera una temperatura "T" promedio inferior a los valores de temperatura en las fronteras y superior a la temperatura inicial de la lámina. Este hecho se pone de manifiesto en la figura 8, donde se observa que el centro de la lámina adquiere una temperatura promedio por encima de los 335K. Por otra parte, el contacto de la superficie de la lámina con el medio ambiente ocasiona que parte del calor que se propaga por la lámina pase al ambiente, disminuyendo en consecuencia el valor de la temperatura que se propaga por la lámina.

Según esto, solo una fracción del calor que se emite en el borde de la lámina se propagará hacia el centro y lados de la misma, produciendo un incremento de la temperatura. Este incremento está vinculado con las propiedades térmicas y físicas del material empleado, de allí las diferencias de temperaturas que se presenta cuando se emplea aluminio (70K) y acero (300K) con 150 iteraciones. La herramienta desarrollada muestra buenas potencialidades y facilidad de uso, mostrando resultados satisfactorios con el empleo de pocos recursos computacionales, haciendo atractivo su empleo.

5. CONCLUSIONES.

1) Se desarrolló un software en Matlab 2011, que permitió simular la solución de la ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden de tipo hiperbólico, que permite analizar el comportamiento de la transferencia de calor en una lámina de dimensión dada, considerando el comportamiento de los nodos de los bordes, las esquinas y los internos.
2) Se desarrolló una interfaz gráfica para hacer más interactivo el proceso de análisis bajo corridas sucesivas, permitiendo modificar los parámetros de simulación y las características del material bajo estudio, de una manera más práctica.
3) El software permite variar dimensiones de la lámina, las temperaturas de frontera, externa e interna (condición inicial), número de iteraciones, el coeficiente de transferencia de calor por convección, propiedades térmicas y físicas del material, proporcionando los resultados por pantalla, pudiendo ser almacenados en medios digitales.
4) Esta herramienta facilita el análisis del proceso de transferencia de calor en láminas con diversas propiedades térmicas y físicas, permitiendo el estudio con distintos número de iteraciones lo cual facilita la visualización del fenómeno físico de la propagación de calor en un material, pudiendo establecer comparaciones para apoyar la toma de decisiones en proceso industriales.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

González, Ch., Ocando, T., Pardo, M. Surga, R. 2013. "Simulación del proceso de cocción en una celda de reducción de aluminio hall-heroult en dos dimensiones". UNEXPO. Doctorado en Ciencias de la Ingenieria. Seminario de Simulación.

Incropera, F., DeWitt, D. 1999. "Fundamentos de transferencia de calor". Pp. 173-188, Pp 248-257. Prentice Hall. Cuarta Edicion.

Mathworks, Inc.1997."Partial Differential Equation Toolbox User's Guide",[On line]. Disponible en:htpp/www.mathenath.chalmers.se/~mohammad/teaching/PDE1_TM/pde1_lab/lab2/toolboxguide.pdf

Zozaya, A. "Método de las diferencias finitas y su aplicación a problemas de electrostática". Universidad de Carabobo. Facultad de Ingeniería. 2004. pp. 5-7